物理学実験　数式処理システムを用いた誤差計算

目的　誤差計算を例として、数式処理ソフトウェアの利用法を学ぶ。

1　概要

実験結果を分析し検討する場合、簡単な計算とグラフ作成ならばエクセル等の表計算ソフトを用いれば良い。しかし、数値的に微分積分処理を行ったり、最適値の探索や理論式との比較検討など、高度な処理を行う場合には、Fortran 等の ”言語 ”を用いてプログラミングし、計算の手続きを記述する必要がある。このテーマでは、純粋なコンピューター言語ではないが、WOLFRAM RESERCH 社の数式処理ソフト、MATHEMATICA を用いて実験結果の解析を行う。例として、β 線の実験とボルダの振り子を取り上げる。このテーマでは、予習の提出は必要ありません。

1.1　簡単な計算と計算結果の保存

最初に Mathematica の持つ機能を簡単に見てみる。まず、デスクトップにある Mathematica のアイコン（図 1）からソフトウェアを起動させると、ノートブックと言われる窓が表示される（図 2）。

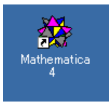

図 1: Mathematica のアイコン

図 2: ノートブック

この窓において 2+2 とタイプした後 Shift キーを押しながら Enter キーを押すと計算がなされて Mathematica が結果を出力する（図 3）。入力する計算式が長くなる場合には、途中で Enter キーを押して改行し複数行に分けても良い。`In[1]:=`および`Out[1]=`は Mathematica が自動的に付ける。

ちゃんと Shift キーを押しましたか？

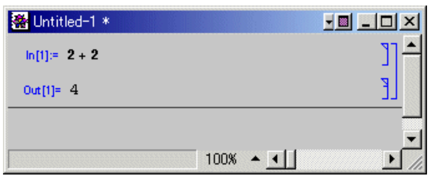

図 3: 計算

ノートブックの右側に現れるカッコをセルブラケットと呼ぶ。セルブラケットによって区切られた行をセルと呼ぶ。セルには In[ ]:=で示される入力用のセルと、Out[ ]=で示される出力用のセルがあり、入力用のセルは上書きして再計算が可能である。セルブラケットをマウスでクリックするとブラケットが反転しセル全体が選択される（図 4）。不必要なセルを削除するには、セルを選択した後、ツールバーの [Edit] から [Clear] を実行する。

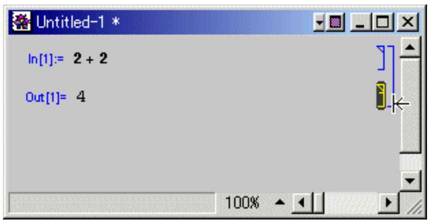

図 4: セルの選択

四則演算は下記のように記述する。

```
x^y     :べき乗
-x      :マイナス
x/y     :わり算
x*y*z   :かけ算 、あるいは x y z でも良い
x+y     :足し算
```

無限小数となる、わり算を実行してみると、分数として処理されていることが分かる。

```
In[2]:=2/3
```

$$\text{Out[2]=}\ \frac{2}{3}$$

小数点付きの数値を得るには、組み込み関数 N を用いる。

```
In[3]:=N[2/3]
Out[3]=0.666667
```

他にも多くの組み込み関数がある。Mathematica では大文字と小文字は区別され、組み込み関数の多くは大文字で始まる。いくつか例をあげると、

```
In[4]:=Sqrt[4]          :平方根
Out[4]=2
In[5]:=Sin[Pi/2]        :サイン関数
Out[5]=1
```

Pi は π を表す定数である。この他定数として、自然対数の底：e を表す E、虚数単位：i を表す I がある。

```
In[6]:=Log[E]
Out[6]=1

In[7]:=I*I
Out[7]=-1
```

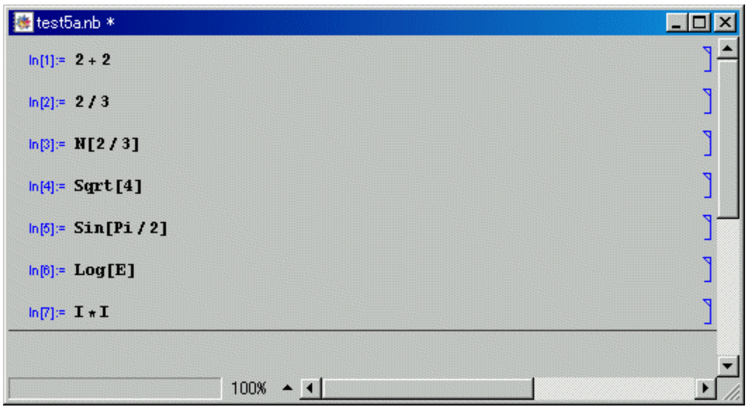

図 5: Mathematica の出力を削除した画面

このような計算は Mathematica のファイルとして保存することができる。計算結果も含めて保存することもできるが、Mathematica の出力を削除した状態で保存する方がプログラムの処理内容が理解しやすい（図 5）。

一端保存したファイルを再び開き、再度計算を実行する場合には、ツールバーの [Edit] から [sellect all] ですべてのセルを選択して、ツールバーの [kernel]-[Evaluation]-[Evaluation Cells] で選択したセルを実行（評価）する（図 6）。あるいは保存するときに、セルの内容をコピーアンドペーストでひとつのセルにまとめると再計算に都合が良い。

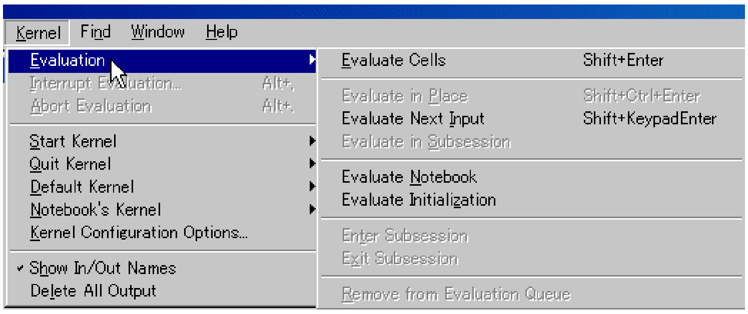

図 6: 選択したセルの評価

1.2 変数と関数

他のプログラミング言語と同じように、変数を用いて計算を組み上げることができる。

; がありますね？

```
In[8]:=x = 1; y = 2; z = 3;
       w = x + y + z
Out[9]=6
```

関数を定義することも可能である。定義には = ではなく := を使用する（遅延割り当てと呼ばれる定義)。定義式の左辺において変数 x が x_ となっていることに注意する。

```
In[10]:=f[x_] := x*Sin[x]

In[11]:=f[Pi/2]
```

Out[11]= $\frac{\pi}{2}$

注：Mathematica においては数種類の括弧が利用され、それぞれ演算の優先順位、リストなどを示すので明確に区別する必要がある。

リストは他の言語における配列に相当します。

`3 * ( 2 + 4 ) - 2`	:演算の優先順位
`function[x_]`	:関数の定義
`list = { 1, 2, 3}`	:リストの作成

変数の定義を解除するには Remove を用いる。下記ではこれまでの計算結果と変数、関数の定義のすべてを削除する。f[x] の定義が解除されていることが分かる。他に Clear によっても定義を解除できる。

どのプログラムも Remove で始めると安全です。‘ は日本語キーボードの場合、@ と同じ所にあります。

```
In[12]:=Remove["Global‘@*"]
f[Pi]
Out[13]=f[π]
```

組み込み関数 D を用いて、関数を数式として微分することもできる。下記では微分する変数を x と指定しているが、これは x で偏微分することを意味する。

```
In[14]:=f[x_]:=x*Cos[x]
        D[f[x],x]
Out[15]=Cos[x]-x Sin[x]
In[16]:=w[x_,y_,z_]:= x^2 + y^2 + z^2;
       D[w[x,y,z],z]
Out[17]= 2 z
```

微分した式を関数として再定義もできる。

今度は := ではありませんが？

```
In[18]:=g[x_]=D[Log[x],x]
        g[3]
```

Out[18]= $\frac{1}{x}$

Out[19]= $\frac{1}{3}$

以下では、2 変数関数 z の、{x,y}={2,3}における x による偏微係数を求める。導関数の式に遅延定義を用いた下記の例では、「2 は変数ではない」というエラーメッセージがでている。

Out[22] に意味はあるのか？

```
In[19]:=Clear[x,y,z,g]
        z[x_,y_]: = x^2 + y^3;
        g[x_,y_]: = D[z[x,y], x]
        g[2,3]
        General::ivar : 2 is not a valid variable.
Out[22]=
```

$\partial_{2} 31$

=を用いて g を定義すると、その場で式が評価され、微係数が得られる。

```
In[23]:=Clear[g]
        g[x_, y_] = D[z[x, y], x]
        g[2, 3]
Out[24]=2 x
Out[25]=4
```

このように:=を用いた定義と=だけの定義とは計算によっては差が生じるので適宜使い分けることが必要である。

以下のように記述すると、関数のグラフが得られる（図 7)。下記では、変数 x の範囲を明示して作図範囲を指定している。

```
In[27]:=Clear[f,g]
        f[x_]:=(x-2)^2+1
        Plot[f[x],{x,-5,5}]
```

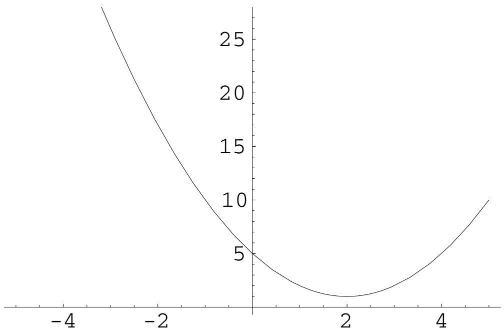

図 7: グラフの表示

関数 g を定義して f と重ねて表示する（図 8)。図から、交点の座標値のおよその値が読みとれる。

```
In[30]:=g[x_]:=2*x-3
        Plot[{f[x],g[x]},{x,-5,5}]
```

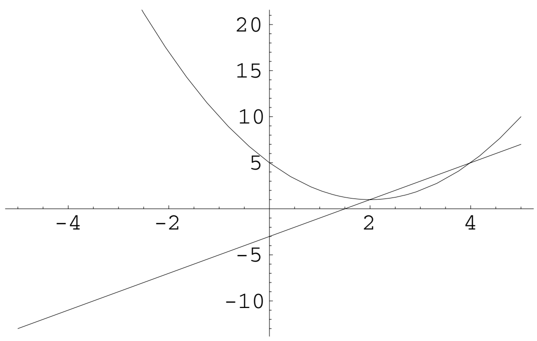

図 8: 2 関数の表示

関数 Solve を用いて、f と g の交点の x 座標を求める。

```
In[32]:=Solve[f[x] == g[x],x]
Out[32]={{x -> 2},{x -> 4}}
```

関数 Solve を方程式の解法に用いてみる。

```
In[33]:=Clear[f]
        f[x_] = x^2 - 6*x + 7
        Solve[f[x] == 0, x]
```

Out[34]=7 - 6 x + x^2

Out[35]= $\{\{$x -> $3 - \sqrt{2}$ $\}$, $\{$ x -> $3 + \sqrt{2}$ $\}\}$

得られた解のひとつ $3-\sqrt{2}$ を、f[x] に代入してみると

```
In[36]:= f[3-Sqrt[2]]
```

Out[36]= 7 - 6($3 - \sqrt{2}$) + 3 ($3 - \sqrt{2}$)^2

関数 Simplify を用いて簡単な形式に変形すると、確かに解であることが分かる。

```
In[37]:= Simplify[f[3-Sqrt[2]]]
Out[37]= 0
```

1.3 リストの作成

Mathematica にはリストと言われる、データをグループにして取り扱う方法がある。他の言語でいえば配列に相当するものであるが、Mathematica のリストはきわめて柔軟な構造をもつ。リストのもっとも簡単な例は数のグループである。

```
In[25]:=list01={2,3,4,6,8}
Out[25]={2,3,4,6,8}
```

リストの成分を取り出すには `[[ ]]` をもちいる。直接リストの成分を置換することもできる。

```
In[26]:=list01[[4]]
Out[26]=6
In[27]:=list01[[5]]=7;
        list01
Out[28]={2,3,4,6,7}
```

リストの成分が規則的な変化をしているなら適当な組み込み関数を用いて作成できる。下記の組み込み関数 `Table` の中の`{i,1,5,1}` は `i` を 1 から 5 まで 1 ずつ増加させることを意味する。

```
In[29]:=list02=Table[i^2,{i,1,5,1}]
Out[29]={1,4,9,16,25}
```

リストを成分とするリストも作成することができる。

```
In[30]:=list03=Table[i^j,{i,1,3,1},{j,1,4,1}]
Out[30]={{1,1,1,1},{2,4,8,16},{3,9,27,81}}
```

リストの次数（要素の数）を知るには `Dimensions` を用いる。

```
In[31]:=Dimensions[list03]
Out[31]={3,4}
```

このような 2 重括弧のリストの場合、その成分を参照するには下記のように記述する。

```
In[32]:=list03[[3]]
Out[32]={3,9,27,81}
In[33]:=list03[[3,2]]
Out[33]=9
```

1.4 繰り返し処理

リストの要素の和をとる場合を考える。以下では繰り返しの処理のために `Do` を用いる。和を保存するために、`sigma` という変数を定義し、初期値をゼロとしている。`Do` 自身は結果の出力をしないことに注意する。

```
In[34]:=list04=Table[i,{i,1,10,1}]
Out[34]={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
In[35]:=sigma=0;
        Do[sigma=sigma+list04[[i]],{i,1,10,1}]
        sigma
Out[37]=55
```

次に、平均値を求める場合を考える。以下ではリストの要素の個数を得るために Dimensions を用いた。ここで変数 kosuu は数ではなくリストであることに注意する。

```
In[41]:=list05={911,960,1015,967,887,954,967,941,978};
        kosuu=Dimensions[list05];
        sigma=0;
        Do[sigma=sigma+list05[[i]],{i,1,kosuu[[1]],1}]
        heikin=N[sigma/kosuu[[1]]]
Out[45]=953.333
```

2　提出課題

以下の課題を解答し報告用紙に記入して、実験終了時に提出すること。今回レポートの提出は必要ありません。

2.1　関数の極値

a. 以下の関数のグラフを $(-2 < x < 4)$ の範囲で描きなさい (手書きで書き写してください)。

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 24x + 7$$

b. 下記の方程式を解きなさい。

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

c. $f(x)$ の極値を求めなさい (x, y 座標を求めること)。

2.2　β 線の測定

下記に示すデータは、放射性元素 Sr からでた β 線を GM カウンターを用いて 10 秒間計測したものである。測定を 20 回行い、平均して 900 個程度の放射線を観測した。この測定値の平均値、分散、偏差を求めなさい。

```
911,960,1015,967,887,954,954,967, 941,978
910,927, 940,953,956,952,930,940,1012,961
```

2.3　ボルダの振り子における誤差計算

ボルダの振り子の実験によって重力加速度 g [cm/s^2] を決定するとき、g は下記の式で求められる。ここで、T は振り子の周期、l は振り子の長さ、r は金属球の半径、θ は振り子の振れ角である。

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\left\{l + r + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l+r}\right\}\left(1 + \frac{{\theta_0}^2}{8}\right)$$

a. 重力加速度 g に関して、次の偏微分を計算しなさい。また下記に与えられている T, l, r, θ_0 の値を代入して、その値を計算しなさい。

$$\frac{\partial g}{\partial T},\quad \frac{\partial g}{\partial l},\quad \frac{\partial g}{\partial r},\quad \frac{\partial g}{\partial \theta_0}$$

b. 以下の値を用いて g と σ_g を求めなさい。ただし、σ_g は下記の式である。

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 {\sigma_T}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 {\sigma_l}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 {\sigma_r}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_0}\right)^2 {\sigma_{\theta_0}}^2}$$

$$\begin{aligned}
T &= 2.1470\,〔\mathrm{s}〕,\quad \sigma_T = 3 \times 10^{-4}〔\mathrm{s}〕\\
l &= 112.40\,〔\mathrm{cm}〕,\quad \sigma_l = 7 \times 10^{-3}〔\mathrm{cm}〕\\
r &= 2.00\,〔\mathrm{cm}〕,\quad \sigma_r = 3 \times 10^{-3}〔\mathrm{cm}〕\\
\theta_0 &= 0.040\,〔\mathrm{rad}〕,\quad \sigma_{\theta_0} = 3 \times 10^{-4}〔\mathrm{rad}〕
\end{aligned}$$

3　「数式処理システムを用いた誤差計算」報告用紙

報告用紙 1 枚目

学科（　　　　　　　　　）学籍番号（　　　　　　　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　　　　　　）

2.1 関数の極値

報告用紙 2 枚目

学科 (　　　　　　) 学籍番号 (　　　　　　　　) 氏名 (　　　　　　　　　　)

2.2 β 線の測定

2.3 ボルダの振り子における誤差計算

a.

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \qquad\qquad = \underline{\qquad\qquad} \quad \text{(数値で)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \qquad\qquad = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \qquad\qquad = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_0} = \qquad\qquad = \underline{\qquad\qquad}$$

b.

$$g =$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 {\sigma_T}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 {\sigma_l}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 {\sigma_r}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_0}\right)^2 {\sigma_{\theta_0}}^2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad) + (\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)} \quad \text{(数値で)}$$

$$\sigma_g =$$