

誤差論ノート

1 序

余計なことから書き始めます。1993年、国際標準化機構 (ISO) から「Guide to the expression of Uncertainty in Measurement」という文書が出されて、計測における用語の統一が提案されています¹。それによると計測の信頼性に関して、概念と用語の変更がなされていて、「誤差」という名称が「不確かさ」に置き換えられています。私自身まだこの変更に関して不明の点が多いのですが、新規の用語とその意をもちいて以下の文章を書いてみます。ただ、名称の長さが気になります。「誤差論」の代わりに「不確かさ論」ということになるのでは長すぎるように思えます。

物理学実験の最初は誤差の話です。新規の用語をもちいれば「不確かさ」の話ということになります²。以下で述べる話の要点は、限られた有限回の測定値から、その背景にある測定の全体（無限回測定）の分布を考えるということにあります。問題となる点は下記のような点です。

- 測定値から分散を推定するとき、その分母が n ではなくて、 $n - 1$ となること
- 測定値の不確かさが分散の $1/\sqrt{n}$ 倍となること

以下では、 n 回測定の平均値の偏差が $1/\sqrt{n}$ 倍となることの直感的な説明を中心に話を構成してみたいと思います。

2 測定値の分布

まず用語の説明のために、実際の測定例をあげたいと思います。最終ページに測定値の一部を載せているのですが、放射線の測定例から話を始めたいと思います。

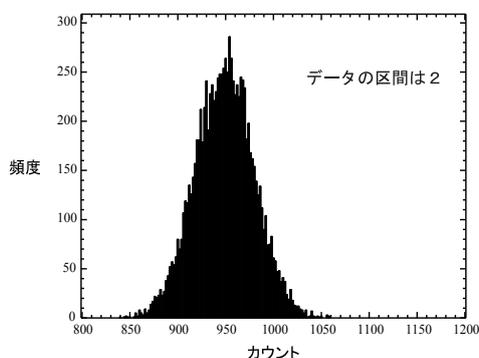


図 1: ベータ線の観測

図 1 は Sr から放射される β 線を GM カウンターで計測したものです。10 秒間の測定を 1 万回繰り返しています。これを区間 2 のヒストグラムとしてグラフ化し、平均して 950 個程度の値が得られています。こ

¹ 『計測における不確かさの表現のガイド』1996年、翻訳:今井秀孝、日本規格協会

² 誤差という言葉は「真の値」との差を意味していたのですが、用いられ方に矛盾もありました。通常、測定の最確値に誤差を付して「測定の最確値 ± 誤差」と書き下していました。上記のように書きながら、その意図しているところは、上式が示す範囲の中に真の値があるということです。最確値の誤差はゼロであるかもしれませんが、上記に示される範囲の半分の大きさであるかもしれません。真の値との差という意味合いとは異なっています。

のグラフは大まかに見ると正規分布 (ガウス分布) と言われる形をしていて、 e^{-x^2} の形 (釣鐘型) です³。分布としては理想的なものですが、なぜこのような形になるのかを簡単に説明してみます。

測定値に影響を与える要素が6個あるとして (図2)、それぞれが測定値を $\pm\frac{1}{2}$ 変化させるとします。図2は、1だけ大きい方に測定値がずれる場合の組です。

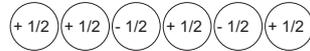


図2: 6個の要素

それぞれの要素が $+\frac{1}{2}$ となる場合も $-\frac{1}{2}$ となる場合も同じ確率として、+3ずれる場合、+2ずれる場合などを数え上げると、図3のような頻度のグラフとなります。

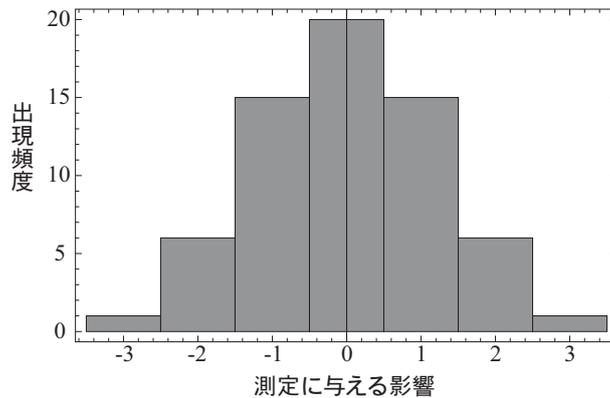


図3: 要素6個の場合の出現頻度

この場合の頻度とは組み合わせのことですね。測定値に影響がちょうどゼロとなるのは ${}_6C_3 = 20$ 通りとなります。これを30個の要素でグラフにしたものが図4です。中心の頻度が途方もなく大きな値となっています。

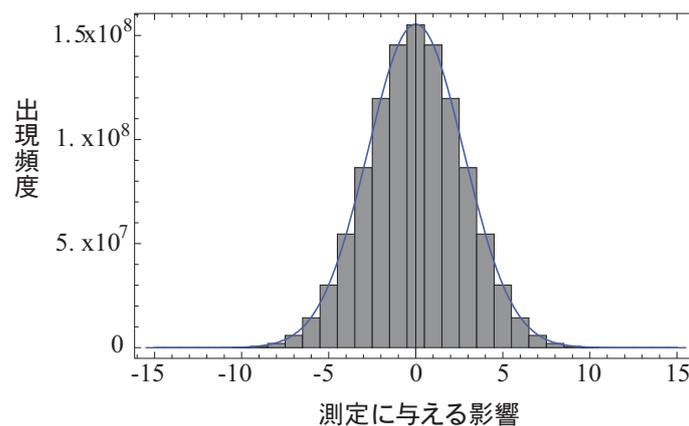


図4: 要素30個の場合の出現頻度

図4の中に引いた曲線は、 $y = 1.55 \times 10^8 e^{-x^2/15.25}$ で、驚くほど完璧な近似です。後は、不連続な値か

³これは本来確率的な現象ですから、この測定に (以前の用語で言うところの) 真の値は存在しないし、正規分布ではなくポアソン分布と考えるのが適当ですが、以下では正規分布をなしていると見なします。

ら連続量へと話を持って行かないといけません。それにしても組み合わせのグラフが、なぜ e^{-x^2} になるのか不思議ですが、このようなことが釣り鐘型の分布の理由と考えられています。

正規分布を特徴づける値として、二つの値があります。ひとつは分布の中心の値で、これは無限回の測定の平均値です。以前の用語では、これを「真の値」と呼んでいました。新規には何と呼んでいいのかわからないのですが、以下の文章では「分布のピーク」と呼ぶことにして、 a で表します。もう一つの値は「偏差」といわれる値で、分布の幅を示します。 σ で表して、定義は下記の式です。

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n}}$$

x_i はそれぞれの測定値、 n は測定回数ですが、ここでは無限回です。 σ は測定値の広がりを示していて、正規分布であれば a を中心として $a - \sigma$ から $a + \sigma$ の区間を考えると、この範囲内に約 70% の測定値が含まれます (図 5)。また、 σ の処でピークの高さが $1/\sqrt{e}$ 倍に小さくなります。

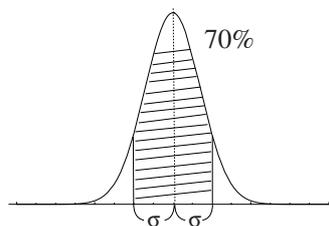


図 5: 正規分布

先の放射線の実験では、仮に、すべての測定の平均値 948.2 を分布のピークとします。偏差もすべての測定値から値を求めて、 $\sigma = 30.8$ とします。

σ^2 を分散と呼びますが、分散のイメージは気体分子の速度 v の 2 乗の平均値ではないでしょうか。気体分子の速度は平均するとゼロなので、 $a = 0$ で、速度の分散を求めるとそのまま v^2 の平均値を求めることになります。この辺から分散の直感的な解釈ができるような気がしますが、ただこれに関してはまだあまり考えていません。

3 測定の平均値と分布のピーク

これから述べる話の背景には先のような測定があるわけですが、一端この背景を忘れて紙上で実験を行ってみます。最終ページにある 1000 回分の測定結果から (表 1), 9 回分の測定抜き出してみます。

941, 943, 951, 970, 915, 865, 937, 1025, 912

これを実験によって得られた値とします。こうした有限の測定から、分布のピークの位置を推定するのがこの文章の目的です。どの測定も同じ条件で行われていますから、平均値をとることに意義があります。平均値は $\bar{x} = 939.9$ ですが、この値と分布のピークとの隔たりはどの程度でしょうか (これが測定値の不確かさ)。測定値の偏差が分かっているなら推定は簡単です。少なくとも平均値ですから、分布のピークから分布の幅 (偏差) 以上に離れているとは考えにくいでしょう。平均値が分布の山の右端付近にある場合と左端付近にある場合を考えて、分布のピークの値は $\bar{x} - \sigma$ から $\bar{x} + \sigma$ の範囲にあると予想できます (図 6)。大まかに言って、不確かさの範囲として偏差程度の大きさを考えれば良いと考えられます。最初の推定としてはこれで良いのですが、残念ながら、9 個の測定値からは“真の偏差”は知りようがありません。

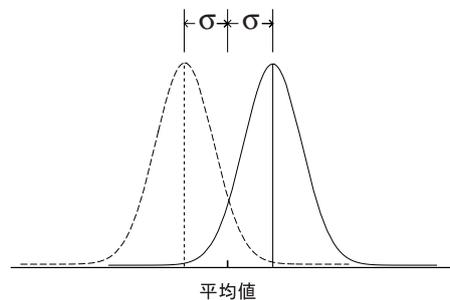


図 6: 平均値と分布のピーク

ここで、偏差の代わりに“平均値からの偏差”と呼ぶべき値を計算してみます。これは分布のピークとの差ではなく、平均値からの差を元にして下記の式で考えます。

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

9 個の測定値を用いて、この値を求めると 40.6 となり、“真の偏差”30.8 と同程度の値を得ます。これによると、偏差の見積もりとして平均値からの偏差を用いても良いと思われれます。

この計算を具体的に見てみましょう。煩雑なので測定回数を 3 回として、測定値を x_1, x_2, x_3 とします。分散 (σ^2) を計算すると、

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + (x_3 - a)^2}{3}$$

上式を、平均値を用いて書きかえて、また $\bar{x} - a = b$ として

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{3} \{ (x_1 - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 + \dots \} \\ &= \frac{1}{3} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + 2(x_1 - \bar{x})b + b^2 + \dots \} \\ &= \frac{1}{3} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + \dots \} + \frac{2b}{3} \{ x_1 - \bar{x} + \dots \} + b^2 \\ &= \frac{1}{3} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + \dots \} + b^2 \\ \text{分散} &= \text{平均値からの分散} + b^2 \quad \dots \text{式 1} \end{aligned}$$

この等式がどのような場合に成立するのか、その条件には微妙な問題がありますが、ここではこのまま論を進めます。

先の計算によると、分散と“平均値からの分散”は同程度の値でした。これを式1と考えあわせると、 b の大きさは σ と比較して小さいことが分かります。つまり平均値と分布のピークとの隔たりは σ に比較して小さく、図6における不確かさの見積もりは大きすぎます。

これは、平均値には平均値の分布があることを意味しています。平均値の広がり σ の幅ではありません。

4 平均値の分散

平均値の広がりが、ひとつひとつの測定よりも小さくなるのはありそうなことです。ひとつひとつのばらつきが均されてしまいますから。以下では、平均値の広がりを考えていくのですが、最初は問題を単純化して2回測定の平均値のバラツキを幾何学的に考えてみましょう。

2回の測定値の組を測定結果の表から選びだし、それぞれを x, y 座標としてプロットすると図7のようなグラフが得られます。この測定点の組の分布は σ の2,3倍程度の半径をもつ円の領域内に入るでしょう。つまり、 σ が分布範囲のスケールを与えます。以下では分布が半径 σ の円内にあると考えます。座標 (a, a) が分布の中心ですが、原点をずらして (a, a) を原点とします。この場合、 x, y 座標値は測定値と分布のピークとの差(誤差)を表します。

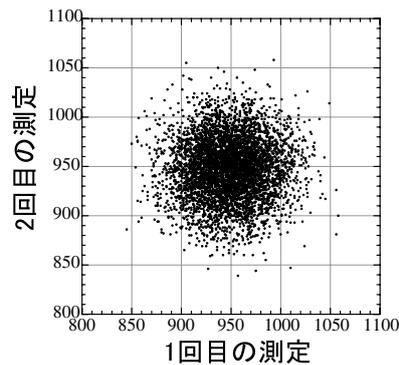


図7: 二つの測定を組み合わせた分布図

ここで、二つの測定値の和 $x + y = P$ を考えてみます。 (x, y) が図8に示される円内の点であるとき、 P の範囲は下記の連立方程式が解を持つ範囲となります。

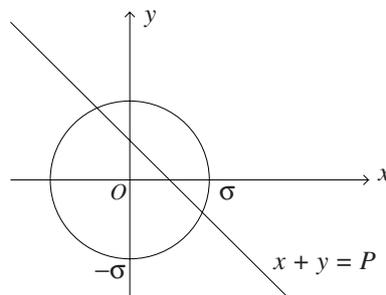


図8: 平均値の範囲

$$\begin{cases} x + y = P \\ x^2 + y^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

これを解いて P の範囲は

$$-\sqrt{2}\sigma \leq P \leq \sqrt{2}\sigma$$

よって平均値の分布は

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

結局、2回測定の平均値の偏差は $\sigma/\sqrt{2}$ になることが分かります。 n 回測定の場合は幾何学的に σ/\sqrt{n} と予想されますが、ここは帰納法で考えてみましょう。

ある測定回数 n において、下記の式が成立しているとします。

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ここで x_i は測定値そのものではなくて、測定値と分布のピークとの差 (誤差) とします。この式の意味合いは、 n 回測定の平均値のばらつきは約 7 割の確率でこの範囲にあるということです。全部の辺に n をかけて $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = Y$ として

$$\begin{aligned} -\sqrt{n}\sigma &\leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \sqrt{n}\sigma \\ -\sqrt{n}\sigma &\leq Y \leq \sqrt{n}\sigma \end{aligned}$$

ここで、もう一つ測定値 x_{n+1} を追加します。 $X = x_{n+1}$ として、 X の範囲はひとつの測定値ですから

$$-\sigma \leq X \leq \sigma$$

また、下記のように P を定義します

$$\begin{aligned} X + Y &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \\ &= P \end{aligned}$$

X と Y を組み合わせて、点 (X, Y) の座標を考えると、今回分布の領域は下記の楕円となります。

$$\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 = 1$$

点 (X, Y) がこの楕円の中にあるとき、 P の範囲を求めれば良いので、先の例と同じように下記の連立方程式が実数解をもつ範囲となります。

$$\begin{cases} X + Y = P \\ \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

これを解いて P の範囲は

$$\begin{aligned} -\sqrt{n+1}\sigma &\leq P \leq \sqrt{n+1}\sigma \\ -\sqrt{n+1}\sigma &\leq X + Y \leq \sqrt{n+1}\sigma \end{aligned}$$

よって平均値の分布は

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n+1}}$$

これを n 回測定の平均値のばらつきが $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となることの証明としましょう。

式 1 の b は平均値と分布のピークとの差でした。平均値のばらつきが $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 程度と予想されたので、 $b = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を式 1 に代入します（但し、今回は n 回測定として）。

$$\begin{aligned} \text{分散} &= \text{平均値からの分散} + b^2 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \end{aligned}$$

なぜか本当の分散が得られます。この結果から b の大きさ、すなわち平均値の不確かさは下記の式で表されることとなります。

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

よって分布のピーク（真の値）は、平均値から、

$$\bar{x} \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

上記の二つの値で区切られる範囲の中に約 70% の確率で存在すると結論できます。

5 不確かさの伝播

ボルダの振り子の実験では、重力加速度 g [cm/s²] は下記の式で表されます。ここで、 T は振り子の周期、 l は振り子の長さ、 r は金属球の半径、 θ は振り子の振れ角です。

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left\{ l + r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l+r} \right\} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} \right)$$

この測定の場合、直接 g を測るのではなく他の測定値から計算によって求めることになります。以降、このような間接測定の不確かさに関して考えてみましょう。

最初は単純な例を考えて、 A, B 二つの測定値と下記のような式で関係している Z の場合について考えてみます。

$$Z = 2A + 3B$$

A, B, Z の分布のピークを A_0, B_0, Z_0 とすると下記の式が成り立ちます。

$$Z_0 = 2A_0 + 3B_0$$

A, B の測定誤差を $\Delta A, \Delta B$ とすると Z の誤差 ΔZ は、

$$Z_0 + \Delta Z = 2(A_0 + \Delta A) + 3(B_0 + \Delta B)$$

$$\Delta Z = 2\Delta A + 3\Delta B$$

このように測定値 A, B のバラツキは Z に対して、元々の式の係数に応じて寄与することになります。 A, B はそれぞれ分散 σ_A, σ_B の範囲で変動します。このような場合に ΔZ の変化の範囲を定めることが目標です。

ΔA を x 座標、 ΔB を y 座標としてグラフにすると、この値の組 (x, y) は楕円内に分布して、また $z = \Delta Z$ として、3次元の空間で考えることにすると、 $z = 2x + 3y$ は平面の式となります。よって (x, y) が楕円内にあるとき、平面上の点の z 座標の範囲は図9で示されるように、高さの変化となります。

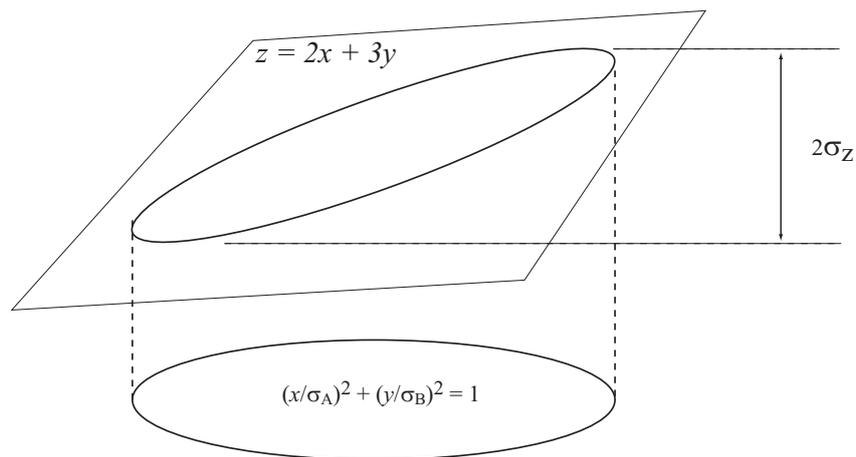


図 9: 変数の存在領域

話は3次元になったのですが、 z の範囲の求め方は同じで、 (x, y) に関する下記の連立方程式が実数解をもつ z の範囲となります。

$$\begin{cases} 2x + 3y = z \\ \left(\frac{x}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_B}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

判別式から z の範囲は下記となります。

$$-\sqrt{(2\sigma_A)^2 + (3\sigma_B)^2} \leq z \leq \sqrt{(2\sigma_A)^2 + (3\sigma_B)^2}$$

これにより、 z の偏差は

$$\sigma_z = \sqrt{(2\sigma_A)^2 + (3\sigma_B)^2}$$

この偏差の式に表れた2,3の係数はそれぞれ平面の x 方向の傾きと y 方向の傾きです。

さて、今度はもう少し一般的な例として、速度の測定を考えてみます。長さ L と通過に要した時間 t から速度 $v = \frac{L}{t}$ を求めるとします。おおよそ $L = 25$ mで、通過に $t = 5$ sを要して、 $v = 5$ m/s程度の値を得るとします。

v を t と L を用いてグラフにすると、図10のような曲面になります。

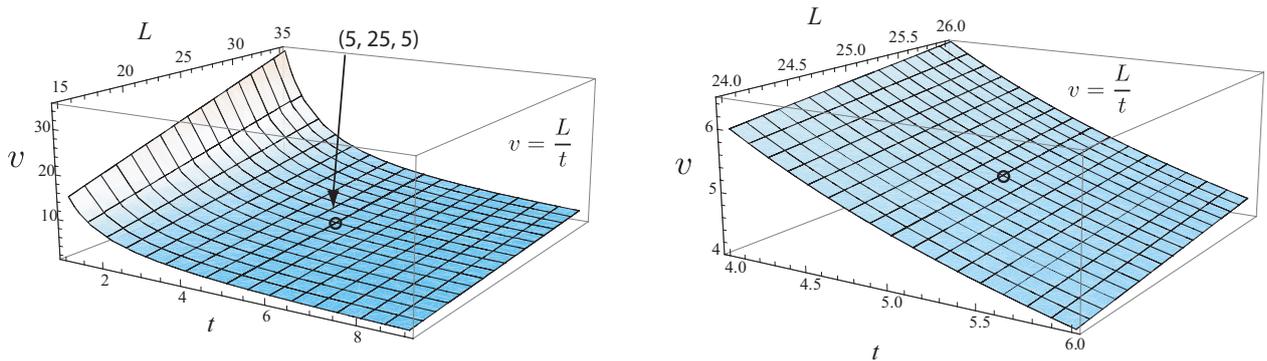


図 10: $v(t, L)$ のグラフとその拡大図

左図は曲面です。(5, 25, 5)の近傍を拡大したのが右図です。まだいっくら曲がっていますが、測定値のばらつきを考える時のように、狭い範囲を相手にするときには、どのような曲面も平面と見なして良いでしょう。平面と考えれば、 v の変動を考える場合に先の方法が利用できるのです、まずはこの平面の式を決定します。

点(5, 25, 5)を通ることは分かっていますので、後は $(x, y) = (5, 25)$ での傾きが必要です。

t 方向の傾きは、 L を25に固定して考えて良いので、下記のようになります。

$$\begin{aligned} v &= \frac{25}{t} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{25}{t^2} \\ &= -\frac{25}{5^2} \quad (t = 5 \text{ より}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

L 方向の傾きは、 t を 5 に固定して考えて良いので、下記ようになります。

$$v = \frac{L}{5}$$
$$\frac{dv}{dL} = \frac{1}{5}$$

よって、求める平面の式は下記となります。

$$(v - 5) = -1(t - 5) + \frac{1}{5}(L - 25)$$

先の方法を用いれば、 t と L に σ_t 、 σ_L の変動があるとき、 v の変動 σ_v は下記の式となります。

$$\sigma_v = \sqrt{(-1)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \sigma_L^2}$$

要するに v を偏微分して、その傾きを用いれば良いということですね。最初の単純な例にすべてが表れていました。

Z が $Z = f(A, B)$ のような、より一般的な式で表される場合、 Z の偏差は下記の式で表されます。

$$\sigma_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2}$$

以上の結果から、重力加速度 g の偏差は下記の式で表されます。

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_0}\right)^2 \sigma_{\theta_0}^2}$$

以上が、間接測定における不確かさ伝播の要旨です。

表 1: 線の測定：1000 回分

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	911	941	965	961	952	881	913	957	956	965
10	960	943	908	972	986	933	1006	914	970	922
20	1015	951	974	887	945	965	969	977	963	931
30	967	970	949	891	934	944	940	908	970	972
40	887	915	925	951	944	941	947	974	934	914
50	954	865	986	955	968	936	919	999	940	1024
60	954	937	882	944	970	981	955	970	919	916
70	967	1025	936	943	905	977	925	911	991	890
80	941	912	918	915	958	946	960	978	954	923
90	978	944	968	974	1010	957	921	940	932	925
100	910	944	1026	946	961	991	980	980	919	939
110	927	939	944	969	909	963	976	920	973	905
120	940	989	955	938	936	939	930	974	977	946
130	953	910	938	938	928	993	940	915	970	885
140	956	941	909	942	965	987	929	921	951	964
150	952	916	937	936	899	928	916	936	951	1014
160	930	1000	935	927	937	948	944	951	983	948
170	940	951	967	919	897	937	919	949	980	1033
180	1012	918	907	962	946	958	974	971	872	988
190	961	958	908	957	904	978	971	969	966	935
200	984	971	953	959	917	876	948	895	965	914
210	938	985	924	957	987	971	916	908	969	925
220	978	995	968	996	918	930	969	926	952	1009
230	885	953	949	978	998	990	971	964	1010	860
240	977	986	925	1007	974	976	937	973	968	917
250	988	948	957	906	900	992	933	926	898	951
260	954	908	960	953	945	954	948	942	942	954
270	983	979	947	919	955	959	944	930	977	967
280	917	937	974	948	944	988	972	898	963	934
290	933	920	931	917	933	971	964	941	981	929
300	933	971	948	955	992	941	963	1001	1006	945
310	908	931	1006	865	978	971	947	885	991	890
320	891	884	1005	963	895	937	935	960	1021	917
330	974	959	953	966	971	1001	950	942	937	946
340	898	969	986	934	933	943	945	994	943	928
350	949	948	979	933	969	892	933	896	945	931
360	986	904	993	966	960	1044	947	944	913	900
370	971	938	944	933	984	923	958	949	992	951
380	951	985	923	941	959	893	912	936	965	934
390	949	910	944	981	968	1015	944	958	979	936
400	976	974	955	1010	983	953	970	959	897	973
410	935	992	968	950	870	967	998	968	927	986
420	936	928	945	935	948	1024	952	951	908	931
430	946	952	1017	876	992	964	952	936	994	1009
440	952	965	924	939	970	971	922	876	982	934
450	934	979	941	939	988	995	956	929	941	951
460	955	944	964	974	940	980	963	924	956	942
470	996	900	961	961	940	908	874	951	967	953
480	928	935	899	909	939	934	935	915	908	920
490	927	919	983	945	984	952	955	959	914	952
500	910	989	916	952	882	927	954	919	912	935
510	972	935	978	964	952	931	969	946	895	955
520	921	973	961	932	955	894	959	928	990	953
530	965	967	963	908	981	917	937	944	911	1016
540	998	964	899	957	900	947	947	941	941	928
550	907	951	947	970	984	944	998	958	969	889
560	986	941	950	1038	927	910	959	927	926	934
570	965	957	942	957	946	969	924	970	966	966
580	927	968	917	901	962	919	912	1009	923	934
590	975	961	953	899	969	926	913	1027	948	968
600	899	892	909	994	1013	970	906	944	975	959
610	981	974	991	907	915	943	962	924	968	942
620	934	938	930	984	876	920	916	891	974	984
630	1028	897	916	952	916	954	954	979	920	948
640	954	929	946	965	946	926	989	956	1007	1012
650	971	915	971	969	980	1022	905	941	902	1008
660	940	965	910	937	1000	944	991	883	966	1005
670	942	911	971	994	978	930	918	973	954	1007
680	937	987	902	956	962	931	933	929	897	908
690	943	930	960	939	989	923	910	971	971	936
700	970	970	948	957	866	961	991	904	938	954
710	965	1013	1001	895	951	962	964	978	974	940
720	932	989	930	921	936	948	910	964	936	920
730	947	971	908	929	936	941	1006	992	889	911
740	946	965	987	985	1005	953	969	1029	975	948
750	949	924	921	947	969	967	961	941	1003	954
760	994	979	954	972	924	957	859	901	952	936
770	980	963	925	959	903	942	946	1001	933	983
780	964	959	895	979	946	997	1000	958	933	1002
790	962	970	987	918	983	913	970	930	978	907
800	935	970	1004	928	931	954	960	901	919	953
810	931	915	1021	939	987	938	936	975	949	946
820	952	947	930	958	997	946	998	949	911	956
830	973	925	881	964	925	890	1002	995	940	948
840	938	913	928	966	952	909	946	918	992	960
850	923	952	913	969	975	957	965	870	923	916
860	946	933	944	922	914	927	894	924	926	912
870	923	910	976	929	976	974	942	972	995	918
880	925	927	934	1007	987	932	973	956	951	965
890	974	900	863	972	953	937	930	916	952	945
900	987	937	950	969	959	941	962	964	911	946
910	927	942	957	997	971	932	945	950	987	978
920	921	980	987	980	952	926	958	997	973	952
930	953	904	915	956	978	953	967	927	900	925
940	931	997	897	931	1001	967	956	931	969	953
950	866	962	925	929	973	958	942	964	950	963
960	935	944	934	951	927	958	934	920	903	955
970	1006	928	902	950	964	898	953	935	955	936
980	932	995	942	860	941	1005	964	954	975	949
990	984	959	974	946	923	960	966	945	920	948